Álgebra Lineal

1) a) $AB=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{(AB)^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1\\2&-1\end{pmatrix}}$

$B^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$; $A^{-1}=\begin{pmatrix}-3&2\\2&-1\end{pmatrix}$, luego $B^{-1}\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3&2\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\2&-1\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{(AB)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}}$

---

2) Sea $x=$ Km de subida ; $y=$ Km de llano ; $z=$ Km de bajada

Sabemos que $velocidad=\dfrac{espacio}{tiempo}\Rightarrow tiempo=\dfrac{espacio}{velocidad}$. Expresando en minutos:

$$d(A,B)\rightarrow\ \frac{x}{54/60}+\frac{y}{80/60}+\frac{z}{90/60}=150\Rightarrow\frac{x}{9/10}+\frac{y}{8/6}+\frac{z}{9/6}=150\Rightarrow\frac{10x}{9}+\frac{6y}{8}+\frac{6z}{9}=150$$

$$d(B,A)\rightarrow\ \frac{z}{54/60}+\frac{y}{80/60}+\frac{x}{90/60}=158\Rightarrow\frac{z}{9/10}+\frac{y}{8/6}+\frac{y}{9/6}=158\Rightarrow\frac{10z}{9}+\frac{6y}{8}+\frac{6x}{9}=158$$

Además: $x+y+z=192$. Se plantea el sistema:

$$\left\{\begin{array}{c}\dfrac{10x}{9}+\dfrac{6y}{8}+\dfrac{6z}{9}=150\\ \dfrac{10z}{9}+\dfrac{6y}{8}+\dfrac{6x}{9}=158\\ x+y+z=192\end{array}\right\}\ \text{Resolviendo: }\left\{\begin{array}{c}x=27\\y=120\\z=45\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{120\,Km\ de\ llano}$$

---

3) $\begin{cases}mx & +y &=& 2-2m\\ x & +my &=& m-1\end{cases}$. Matrices asociadas: $M=\begin{pmatrix}m&1\\1&m\end{pmatrix}$ y $M^*=\left(\begin{array}{cc|c}m&1&2-2m\\1&m&m-1\end{array}\right)$

a) $|M|=\begin{vmatrix}m&1\\1&m\end{vmatrix}=m^2-1=0\Rightarrow m=\pm1$

- Caso 1.- Si $m\neq\pm1\Rightarrow|M|\neq0\Rightarrow rang(M)=2=rang(M^*)\Rightarrow SCD$

- Caso 2.- Si $m=1\Rightarrow$ Sustituyendo: $rang(M^*)=rang\left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\1&1&0\end{array}\right)=F_2-F_1=rang\left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&0&0\end{array}\right)=1$

  Como $rang(M)=1<2=\text{número incógnitas}\Rightarrow SCI$

- Caso 3.- Si $m=-1\Rightarrow$ Sustituyendo: $rang(M^*)=rang\left(\begin{array}{cc|c}-1&1&4\\1&-1&4\end{array}\right)=F_2+F_1=rang\left(\begin{array}{cc|c}-1&1&0\\0&0&8\end{array}\right)=2$

  Como $rang(M)=1\Rightarrow SI$

b) Si $m=5 \Rightarrow$ sustituyendo: $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 1 & -8 \\ 1 & 5 & 4 \end{array}\right) \approx F_2 \leftrightarrow F_1 \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & -8 \end{array}\right) \approx F_2 - 5F_1 \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 4 \\ 0 & -24 & -28 \end{array}\right) \Rightarrow$

$-24y=-28 \Rightarrow y=\frac{28}{24} \Rightarrow \boxed{y=\frac{7}{6}}$.

Sustiuyendo en la 1ª ecuación: $x+5y=4 \Rightarrow x+\frac{35}{6}=4 \Rightarrow \boxed{x=-\frac{11}{6}}$

---

4) a) Nos piden la matriz: $B \cdot A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.25 & 0.4 & 0.75 \\ 0.8 & 0.75 & 0.6 & 0.25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 130 & 160 \\ 120 & 80 \\ 210 & 130 \\ 100 & 60 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 215 & 149 \\ 345 & 281 \end{pmatrix}}$

b) $(3000 \quad 2000) \cdot \begin{pmatrix} 215 & 149 \\ 345 & 281 \end{pmatrix} = \boxed{(1335000 \quad 1009000)}$

---

5) a) $\boxed{\begin{pmatrix} 0.15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.65 & 0.15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.85 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.04 \end{pmatrix}}$ **b)** $\begin{pmatrix} 0.15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.65 & 0.15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.85 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.04 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 700 \\ 400 \\ 300 \\ 200 \\ 175 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 105 \\ 515 \\ 360 \\ 265 \\ 187 \end{pmatrix}}$

---

6) a) $\boxed{C = \begin{pmatrix} 600 & 0 & 0 \\ 0 & 920 & 0 \\ 0 & 0 & 1430 \end{pmatrix}}$; $\boxed{I = \begin{pmatrix} 1800 & 0 & 0 \\ 0 & 2800 & 0 \\ 0 & 0 & 4000 \end{pmatrix}}$; $\boxed{V = (2240 \quad 1625 \quad 842)}$

b) <u>Ingresos Anuales</u> : $V \cdot C = (2240 \quad 1625 \quad 842) \cdot \begin{pmatrix} 600 & 0 & 0 \\ 0 & 920 & 0 \\ 0 & 0 & 1430 \end{pmatrix} = \boxed{(4032000 \quad 4550000 \quad 3368000)}$

<u>Gastos Anuales</u> : $V \cdot I = (2240 \quad 1625 \quad 842) \cdot \begin{pmatrix} 1800 & 0 & 0 \\ 0 & 2800 & 0 \\ 0 & 0 & 4000 \end{pmatrix} = \boxed{(1344000 \quad 1495000 \quad 1204060)}$

<u>Beneficios Anuales</u> : $(2240 \quad 1625 \quad 842) \cdot \begin{pmatrix} 1800-600 & 0 & 0 \\ 0 & 2800-920 & 0 \\ 0 & 0 & 4000-1430 \end{pmatrix} =$

$\boxed{(2688000 \quad 3055000 \quad 2163940)}$

---

7) a) $A \in M_{54}$, $B \in M_{mn}$, $C \in M_{37}$. Para que exista la matriz producto $A \cdot B$, $m=4$, como además existe la matriz $A \cdot B \cdot C$, $n=3$, luego la matriz $\boxed{B \text{ es } 4\text{x}3}$ y $\boxed{ABC \text{ es } 5\text{x}7}$

b) Sea $A \in M_{mn} \Rightarrow A^t \in M_{nm}$, así $AA^t \in M_m$ siempre existe

---

8) Sean $\left\{\begin{array}{l} x = personas\ curso\ A \\ y = personas\ curso\ B \\ z = personas\ curso\ C \end{array}\right\}$, planteamos el sistema: $\left\{\begin{array}{c} 40.000x + 16.000y + 20.000z = 2.720.000 \\ 40.000x = 16.000 \cdot 5y \\ x + y + z = 100 \end{array}\right\} \Rightarrow$

Simplificando: $\left\{\begin{array}{c} 40x + 16y + 20z = 2.720 \\ x = 2y \\ x + y + z = 100 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Resolviendo $\boxed{x = 40}$; $\boxed{y = 20}$; $\boxed{z = 40}$

---

9) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

a) Si $AC = BD = I \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} C = A^{-1} \\ D = B^{-1} \end{array}\right.$. Luego: $\boxed{C = \begin{pmatrix} -1/7 & 3/7 \\ 3/7 & -2/7 \end{pmatrix}}$ y $\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/5 & -1/5 \end{pmatrix}}$

b) $C = A^{-1} \Rightarrow C^{-1} = A$. Igualmente: si $D = B^{-1} \Rightarrow D^{-1} = B$.

Así: $(C^{-1} - D^{-1})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (A - B)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Discutimos el sistema: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \end{array}\right) = F_2 - 2F_1 = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rang(M) = rang(M^*) = 1 \Rightarrow SCI$

<u>Solución</u>.- Llamando $y = t \Rightarrow x + 3t = 1 \Rightarrow x = 1 - 3t$. $\boxed{\{(1-3t, t) | \ \forall t \in R\}}$

---

10) a) $\begin{pmatrix} 8 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 \\ 72 \\ 25 \end{pmatrix}$. Luego: $\boxed{90\,\text{kg de Chatarra}, 72\,\text{kg de carbon}, 25\,\text{Aleaciones}}$

b) $(34 \quad 28 \quad 9) \cdot \begin{pmatrix} 8 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = (458 \quad 381 \quad 343)$ $\boxed{458\,\text{de lámina}, 381\,\text{kg de rollos}, 343\,\text{especiales}}$

---

11) $\left\{\begin{array}{llll} x & + my & + z & = 2 \\ mx & & + 2z & = 4 \\ x & + y & + z & = 2 \end{array}\right. \Rightarrow$ Matrices asociadas: $M = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M^* = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & 2 \\ m & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$|M| = 0 \Rightarrow -m^2 + 3m - 2 = 0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} m = 2 \\ m = 1 \end{array}\right.$

- <u>Caso 1</u>.- Si $m \neq 2, m \neq 1$, $|M| \neq 0 \Rightarrow rang(M) = 3 = rang(M^*) \Rightarrow SCD$

- Caso 2.- Si $m=1$, sustituyendo: $rang(M^*) = rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vert & 2 \\ 1 & 0 & 2 & \vert & 4 \\ 1 & 1 & 1 & \vert & 2 \end{pmatrix} = \begin{matrix} F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{matrix} = rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vert & 2 \\ 0 & -1 & 1 & \vert & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \vert & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

  $\Rightarrow rang(M) = 2 = rang(M^*) \Rightarrow SCI$

- Caso 3.- Si $m=2$, sustituyendo: $rang(M^*) = rang\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vert & 2 \\ 2 & 0 & 2 & \vert & 4 \\ 1 & 1 & 1 & \vert & 2 \end{pmatrix} = \begin{matrix} F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{matrix} = rang\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vert & 2 \\ 0 & -4 & 0 & \vert & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \vert & 0 \end{pmatrix} =$

  $= F_2 - 4F_3 = rang\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vert & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \vert & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \vert & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rang(M) = 2 = rang(M^*) \Rightarrow SCI$

---

12) Sean $\left\{ \begin{matrix} x = camistas \\ y = gorras \\ z = banderines \end{matrix} \right\}$, planteamos el sistema: $\left\{ \begin{matrix} (800-300)x + (120-20)y + (200-80)z = 67400 \\ 300x + 20y + 80z = 34600 \\ x + y + z = 270 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$

Simplificando: $\left\{ \begin{matrix} 500x + 100y + 120z = 67400 \\ 300x + 20y + 80z = 34600 \\ x + y + z = 270 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} 50x + 10y + 12z = 6740 \\ 30x + 2y + 8z = 3460 \\ x + y + z = 270 \end{matrix} \right\} \Rightarrow: \boxed{x = 100}\ ;\ \boxed{y = 150}\ ;\ \boxed{z = 20}$

---

13) Formamos las matrices: $M = \begin{pmatrix} 20 & 5 & 3 \\ 18 & 6 & 5 \\ 22 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2000 \\ 500 \\ 1000 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}\cdot$

a) $P \cdot M = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 & 5 & 3 \\ 18 & 6 & 5 \\ 22 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 304 & 57 & 47 \end{pmatrix}}$

b) $M \cdot C = \begin{pmatrix} 20 & 5 & 3 \\ 18 & 6 & 5 \\ 22 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 500 \\ 1000 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 45.000 \\ 44.000 \\ 46.500 \end{pmatrix}}$

c) $P \cdot M \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 & 5 & 3 \\ 18 & 6 & 5 \\ 22 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 500 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 304 & 55 & 47 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 500 \\ 1000 \end{pmatrix} = \boxed{682.500 \text{ pts}}$

---

14) a) Si $A^{-1}B = A \Rightarrow AA^{-1}B = AA \Rightarrow B = A^2 \Rightarrow B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}$

b) $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} my \\ 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} my \\ 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2x + y \\ -x - y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} my \\ 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2x+(1+m)y \\ -x-y+2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x+(m+1)y=1 \\ x-y=2 \end{cases}$$ Matrices asociadas: $M^*=\left(\begin{array}{cc|c} -2 & m+1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$

Discusión.- $|M| = \begin{vmatrix} -2 & m+1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2-m-1=0 \Rightarrow m=1$

Caso 1.- Si $m \neq 1 \Rightarrow rang(M)=2=rang(M^*) \Rightarrow SCD$

Caso 2.- Si $m=1 \Rightarrow$ Sustiuyendo: $rang(M^*) = rang\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right) = F_1+2F_2 = rang\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow rang(M)=1 \neq 2 = rang(M^*) \Rightarrow SI$

---

15) Sean $\begin{cases} x = litros\ de\ A \\ y = litros\ de\ B \\ z = litros\ de\ C \end{cases}$, planteamos el sistema: $\begin{cases} x+y+z=72 \\ x=(y+z)/3 \\ y-10=z+4=x+6 \end{cases} \Rightarrow$ La última ecuación la podemos expresar: $\left\langle \begin{matrix} y-10=z+4 \\ y-10=x+6 \end{matrix} \right\rangle \Rightarrow \left\langle \begin{matrix} y=z+14 \\ y=x+16 \end{matrix} \right\rangle \Rightarrow$ Igualando: $z+14=x+16 \Rightarrow z=x+2$.

El sistema quedará: $\begin{cases} x+y+z=72 \\ 3x=y+z \\ z=x+2 \end{cases} \Rightarrow$ Resolviendo: $\boxed{x=18}$; $\boxed{y=34}$; $\boxed{z=20}$

---

16) $\begin{cases} x - y + z = 6 \\ -x - y + (a-4)z = 7 \\ x + y + 2z = 11 \end{cases} \Rightarrow$ Matrices asociadas: $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & a-4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $M^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & a-4 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 11 \end{pmatrix}$

$|M| = 0 \Rightarrow 4-2a=0=0 \Rightarrow a=2$

a) Discusión

- Caso 1.- Si $a \neq 2$, $|M| \neq 0 \Rightarrow rang(M)=3=rang(M^*) \Rightarrow SCD$
- Caso 2.- Si $a=2$, sustituyendo: $rang(M^*) = rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & -2 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 11 \end{array}\right) = \begin{matrix} F_2+F_1 \\ F_3-F_1 \end{matrix} = rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -1 & 13 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow F_3+F_2 = rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{array}\right) \Rightarrow rang(M)=2 \neq 3 = rang(M^*) \Rightarrow SI$

b) Si $a=4$, sustituyendo: $rang(M^*) = rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 11 \end{array}\right) = \begin{matrix} F_2+F_1 \\ F_3-F_1 \end{matrix} = rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 13 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow F_3+F_2=rang\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&6\\0&-2&-1&13\\0&0&2&18\end{array}\right)\Rightarrow$$ de la 3ª ecuación: $2z=18\Rightarrow\boxed{z=9}$.

Sustituyendo en la 2ª ecuación: $-2y-9=13\Rightarrow-2y=4\Rightarrow\boxed{y=-2}$

Por último sustituyendo en la 1ª ecuación: $x+2+9=6\Rightarrow\boxed{x=-5}$

---

17) a) $A+A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\1/10&1&0\\1/10&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\1/10&1&0\\1/10&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\1/10&1&0\\1/10&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1/10&1&0\\1/10&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\2/10&1&0\\2/10&0&1\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}2&0&0\\3/10&2&0\\3/10&0&2\end{pmatrix}}$

b) Observando la expresión de $A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\2/10&1&0\\2/10&0&1\end{pmatrix}$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2/10&1&0\\2/10&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\1/10&1&0\\1/10&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\3/10&1&0\\3/10&0&1\end{pmatrix},......,\ A^5=\begin{pmatrix}1&0&0\\5/10&1&0\\5/10&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1/2&1&0\\1/2&0&1\end{pmatrix}$$

Así el sistema $A^5\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\\5\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\1/2&1&0\\1/2&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\\5\\1\end{pmatrix}\Rightarrow$ De la 1ª ecuación $\boxed{x=20}$

Sustituyendo en la 2ª ecuación: $\frac{x}{2}+y=5\Rightarrow10+y=5\Rightarrow\boxed{y=-5}$

Por último de la 3ª ecuación: $\frac{x}{2}+z=1\Rightarrow10+z=1\Rightarrow\boxed{z=-9}$

---

18) $\left\{\begin{array}{rrrcl}x&+2y&-az&=&1\\&-y&+z&=&0\\ax&&+z&=&a\end{array}\right.\Rightarrow$ Matrices asociadas: $M=\begin{pmatrix}1&2&-a\\0&-1&1\\a&0&1\end{pmatrix}$ y $M^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-a&1\\0&-1&1&0\\a&0&1&a\end{array}\right)$

$$|M|=\begin{vmatrix}1&2&-a\\0&-1&1\\a&0&1\end{vmatrix}=a^2-2a+1=0\Rightarrow a=1$$

- <u>Caso 1</u>.- Si $a\neq1$, $|M|\neq0\Rightarrow rang(M)=3=rang(M^*)\Rightarrow SCD$
- <u>Caso 2</u>.- Si $a=1$, sustituyendo: $rang\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&1\\0&-1&1&0\\1&0&1&1\end{array}\right)=F_3-F_1=rang\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&1\\0&-1&1&0\\0&-2&2&0\end{array}\right)=F_3-2F_2=$

$$= rang\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rang(M) = 2 = rang(M^*) < 3 \Rightarrow SCI$$

b) Si $a = 1$, $M^* \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -y + z = 0 \end{cases}$. Si $z = t$, de la 2ª ecuación: $-y + t = 0 \Rightarrow y = t$

Sustituyendo en la 1ª: $x + 2y - z = 1 \Rightarrow x + 2t - t = 1 \Rightarrow x = 1 - t$. Luego Sol: $\boxed{\{(1-t, t, t) \mid t \in R\}}$

---

19) Sean $\begin{cases} x = \text{cantidad de euros} \\ y = \text{cantidad de dólares} \\ z = \text{cantidad de libras} \end{cases}$, planteamos el sistema: $\begin{cases} x + 1.1y + 1.5z = 264000 \\ x = 2 \cdot 1.1y \\ 1.5z = 0.1x \end{cases} \Rightarrow$

Multiplicando todas ecuaciones por 10: $\begin{cases} 10x + 11y + 15z = 2640000 \\ 10x = 22y \\ 15z = x \end{cases} \Rightarrow$

$\boxed{x = 165.000}$; $\boxed{y = 75.000}$; $\boxed{z = 11.000}$

---

20) $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a^2 \end{cases} \Rightarrow$ Matrices asociadas: $M = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ y $M^* = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & a & 1 & | & a \\ 1 & 1 & a & | & a^2 \end{pmatrix}$

a) $|M| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 2 - a^2 - a = 0 \Rightarrow \left\langle \begin{matrix} a = 1 \\ a = -2 \end{matrix} \right.$

- Caso 1.- Si $a \neq 1$, $a \neq -2$ $|M| \neq 0 \Rightarrow rang(M) = 3 = rang(M^*) \Rightarrow SCD$

- Caso 2.- Si $a = 1$, sustituyendo: $rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} = F_i - F_1 = rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$

  Luego $rang(M) = 1 = rang(M^*) < 2 \Rightarrow SCI$

- Caso 3.- Si $a = -2$, sustituyendo: $rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 1 \\ 1 & -2 & 1 & | & -2 \\ 1 & 1 & -2 & | & 4 \end{pmatrix} = F_i - F_1 = rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 1 \\ 0 & -3 & 3 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 2 \end{pmatrix}$

  Luego $rang(M) = 2 \neq rang(M^*) < 3 \Rightarrow SI$

b) Si $a=-1$, sustituyendo $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \approx F_i + F_1 \approx \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right)$ De la 3ª ecuación: $2y=2 \Rightarrow \boxed{y=1}$

De la 2ª ecuación: $2z=0 \Rightarrow \boxed{z=0}$. Por último, de la 1ª: $-x+y+z=1 \Rightarrow -x+1=1 \Rightarrow \boxed{x=0}$

---

21) a) $A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=1 \Rightarrow \exists\, A^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$

$B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow |B|=0 \Rightarrow$ no existe inversa de B

b) Si $XA-B=2I \Rightarrow XA=2I+B \Rightarrow X=(2I+B)A^{-1}$. Así se tiene: (teniendo en cuenta apartado a))

$$X=\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix} 27 & -20 & 3 \\ 17 & -13 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}}$$

c) $A^2=\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; Análogamente:

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I_3$$

Como $86=3\cdot 28+2 \Rightarrow A^{86}=A^{283+2}=(A^3)^{28}\cdot A^2=I^{28}\cdot A^2=I\cdot A^2=A^2$

Es decir, $\boxed{A^{86}=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$

---

22) Sean $\begin{Bmatrix} x=\text{precio inicial A} \\ y=\text{precio inicial B} \\ z=\text{precio inicial C} \end{Bmatrix}$, planteamos el sistema: $\begin{Bmatrix} \dfrac{4x}{100}+\dfrac{12y}{100}+\dfrac{15z}{100}=16 \\ x+y+z=135 \\ \dfrac{24x}{100}+\dfrac{10y}{100}+\dfrac{80z}{100}=29 \end{Bmatrix} \Rightarrow$ multiplicando todo por 100

$\begin{Bmatrix} 4x+12y+15z=1600 \\ x+y+z=135 \\ 24x+10y+30z=2900 \end{Bmatrix}$ Resolviendo: $\boxed{x=25\,€}$; $\boxed{y=50\,€}$; $\boxed{z=60\,€}$

---

23) a) $M = A\cdot B = \begin{pmatrix}2 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} = \boxed{3}$, $N = B\cdot A = \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}6 & -3 & -3\\-4 & -2 & 2\\2 & 1 & -1\end{pmatrix}}$

b) $P = N - I = \begin{pmatrix}6 & -3 & -3\\-4 & -2 & 2\\2 & 1 & -1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & -3 & -3\\-4 & -3 & 2\\2 & 1 & -2\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix}2 & 3/2 & -3/2\\-2 & -2 & 1\\1 & 1/2 & -3/2\end{pmatrix}}$

c) $PX = C \Rightarrow X = P^{-1}\cdot C = \begin{pmatrix}2 & 3/2 & -3/2\\-2 & -2 & 1\\1 & 1/2 & -3/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}5\\-4\\3\end{pmatrix}}$

---

24) Si $AX = XA$, llamando $X = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$, se cumplirá: $\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\4 & 2\end{pmatrix} = \cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\4 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}a+4b & 2b\\c+4d & 2d\end{pmatrix} = \cdot\begin{pmatrix}a & b\\4a+2c & 4b+2d\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix}a = a+4b\\b = 2b\\4a+2c = c+4d\\4b+2d = 2d\end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix}b = 0\\c = 4d-4a\end{Bmatrix}$, luego $\boxed{X = \begin{pmatrix}a & 0\\4d-4a & d\end{pmatrix}}$

---

25) $\begin{cases}x + 2y + z = 0\\ -x - y = 1\\ -y - z = -1\end{cases} \Rightarrow$ Matrices asociadas: $M = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\-1 & -1 & 0\\0 & -1 & -1\end{pmatrix}$ y $M^* = \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 0\\-1 & -1 & 0 & 1\\0 & -1 & -1 & -1\end{array}\right)$

$|M| = \begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\-1 & -1 & 0\\0 & -1 & -1\end{vmatrix} = 0$, luego no puede ser SCD

Discutiendo mediante rangos:

$rang(M^*) = rang\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 0\\-1 & -1 & 0 & 1\\0 & -1 & -1 & -1\end{array}\right) = F_2 + F_1 = rang\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 0\\0 & 1 & 1 & 1\\0 & -1 & -1 & -1\end{array}\right) = F_3 + F_2 = rang\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 0\\0 & 1 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) = 2$

Luego $rang(M) = 2 = rang(M^*) < 3 \Rightarrow SCI$

Para resolverlo tomamos el sistema reducido: $\begin{Bmatrix}x + 2y + z = 0\\y + z = 1\end{Bmatrix}$ Llamando $z = t$ y sustituyendo en la 2ª

Ecuación: $y = 1 - z = 1 - t$. Sustituyendo ahora en la 1ª ecuación: $x + 2(1-t) + t = 0 \Rightarrow x = t - 2$

Sol: $\boxed{\{(t-2, 1-t, t) \mid t \in R\}}$

---

26) Si $A^{-1} = A^t \Rightarrow A\cdot A^{-1} = A\cdot A^t \Rightarrow A\cdot A^t = I$. En este caso:

$A\cdot A^t = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}a & 4\\-4 & a\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix}a & -4\\4 & a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{25}\begin{pmatrix}a^2+16 & 0\\0 & a^2+16\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ Igualando términos:

$$\frac{a^2+16}{25}=1 \Rightarrow a^2=9 \Rightarrow \boxed{a=\pm 3}$$

---

27) Como $X^2=2X \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ba+bc & c^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 2b & 2c \end{pmatrix}$, igualando términos:

$$\left\{\begin{matrix} a^2=2a \\ ba+bc=2b \\ c^2=2c \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} a(a-2)=0 \\ b(a+c)=2b \\ c(c-2)=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} a=0\,,a=2 \\ b(a+c)=2b \\ c=0\,,c=2 \end{matrix}\right\}$$ Posibles casos:

- Si $a=c=0 \Rightarrow b=2b \Rightarrow b=0 \Rightarrow \boxed{X=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$
- Si $a=2\,,c=0 \Rightarrow 2b=2b$, luego b puede tomar cualquier valor $\boxed{X=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}}$
- Si $a=0\,,c=2 \Rightarrow 2b=2b$, luego b puede tomar cualquier valor $\boxed{X=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 2 \end{pmatrix}}$
- Si $a=c=2 \Rightarrow 4b=2b \Rightarrow b=0 \Rightarrow \boxed{X=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$

---

28) $\left\{\begin{matrix} mx & +y & -3z & = & 5 \\ -x & +y & +z & = & -4 \\ x & +my & -mz & = & 1 \end{matrix}\right. \Rightarrow$ Matrices asociadas: $M=\begin{pmatrix} m & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & m & -m \end{pmatrix}$ y $M^*=\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & m & -m & 1 \end{array}\right)$

a) $|M|=\begin{vmatrix} m & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & m & -m \end{vmatrix}=m^2-m-2=0 \Rightarrow \left\langle\begin{matrix} m=-1 \\ m=2 \end{matrix}\right.$

- <u>Caso 1</u>.- Si $m\neq -1$, $m\neq 2$ $|M|\neq 0 \Rightarrow rang(M)=3=rang(M^*) \Rightarrow SCD$

- <u>Caso 2</u>.- Si $m=-1$,sustituyendo: $rang\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)=\begin{matrix} F_2-F_1 \\ F_3+F_1 \end{matrix}=rang\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{array}\right)=F_2 \leftrightarrow F_3$

$$=rang\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & -9 \end{array}\right)=F_3+2F_2=rang\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow rang(M)=2\neq 3=rang(M^*) \Rightarrow SI$$

- <u>Caso 3</u>.- Si $m=2$,sustituyendo: $rang\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)=F_1 \leftrightarrow F_2=rang\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)=$

$$\underset{F_3+F_1}{\overset{F_2+2F_1}{=}} rang\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 1 & -4\\ 0 & 3 & -1 & -3\\ 0 & 3 & -1 & -3\end{array}\right) = F_3-F_2 = rang\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 1 & -4\\ 0 & 3 & -1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \Rightarrow rang(M)=2=rang(M^*) \Rightarrow SCI$$

b) Si $m=2$,el sistema es compatible indeterminado. Pasando a ecuaciones: $\left\{\begin{array}{c}-x+y+z=-4\\ 3y-z=-3\end{array}\right\}$

Sea $z=t \Rightarrow$ de la 2ª ecuación: $3y-t=-3 \Rightarrow 3y=t-3 \Rightarrow y=\frac{t-3}{3}$. Sustituyendo ahora en la 1ª ecuación:

$$-x+\frac{t-3}{3}+t=-4 \Rightarrow -x+\frac{4t-3}{3}=-4 \Rightarrow x=\frac{4t-3}{3}+4=\frac{4t+9}{3}$$

Sol: $\boxed{\left\{\left(\frac{4t+9}{3},\frac{t-3}{3},t\right) \middle\| \, t\in R\right\}}$

---

29) $\left\{\begin{array}{ccccc}2x & -3y & +z & = & 0\\ x & -ky & -3z & = & 0\\ 5x & +2y & -z & = & 0\end{array}\right. \Rightarrow$ S trata de un sistema homogéneo. Luego $rang(M)=rang(M^*)$

Matrices asociada: $M=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & -k & -3\\ 5 & 2 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow |M|=7k-56=0 \Rightarrow k=8$

- Caso 1.- Si $k\neq 8$ $|M|\neq 0 \Rightarrow rang(M)=3=rang(M^*) \Rightarrow SCD$
- Caso 2.- Si $k=8$, sustituyendo: $rang\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & -8 & -3\\ 5 & 2 & -1\end{pmatrix} = F_2 \leftrightarrow F_1 = rang\begin{pmatrix}1 & -8 & -3\\ 2 & -3 & 1\\ 5 & 2 & -1\end{pmatrix} \underset{F_3-5F_1}{\overset{F_2-2F_1}{=}}$

$$= rang\begin{pmatrix}1 & 8 & -3\\ 0 & -19 & 7\\ 0 & -38 & 14\end{pmatrix} = F_3-2F_2 = rang\begin{pmatrix}1 & 8 & -3\\ 0 & -19 & 7\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = 2 \Rightarrow rang(M)=2=rang(M^*) \Rightarrow SCi$$

b) Si $k=8$, matriz reducida (ver a)) $M=\begin{pmatrix}1 & 8 & -3\\ 0 & -19 & 7\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Pasando a ecuaciones:

$\left\{\begin{array}{c}x+8y-3z=0\\ -19y+7z=0\end{array}\right\}$ Sea $z=t \Rightarrow$ de la 2ª ecuación: $-19y+7t=0 \Rightarrow y=\frac{7t}{19}$. Sustituyendo ahora

en la 1ª ecuación: $x+8\cdot\frac{7t}{19}-3t=0 \Rightarrow x=\frac{t}{19}$. Así: Sol: $\boxed{\left\{\left(\frac{t}{19},\frac{7t}{19},t\right) \middle\| \, t\in R\right\}}$

---

30) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x + 2y + pz = -3 \\ x - 2y - z = p \end{cases} \Rightarrow$ Matrices asociadas: $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & p \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & p & -3 \\ 1 & -2 & -1 & p \end{array}\right)$

a) $|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & p \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 3p - 3 = 0 \Rightarrow p = 1$

- Caso 1.- Si $p \neq 1$, $|M| \neq 0 \Rightarrow rang(M) = 3 = rang(M^*) \Rightarrow SCD$
- Caso 2.- Si $p = 1$,sustituyendo: $rang(M^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) = \begin{matrix} F_2 + F_1 \\ F_3 - F_1 \end{matrix} = rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right) =$

$= F_3 + F_2 = rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \Rightarrow rang(M) = 2 \neq 3 = rang(M^*) \Rightarrow SI$

b) Si $p = 2$, sabemos que el sistema es compatible determinado. Para resolverlo:

- Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{3}{3} \Rightarrow \boxed{x = 1} \; ; \; y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{0}{3} \Rightarrow \boxed{y = 0} \; ; \; z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{3} \Rightarrow \boxed{z = -1}$$

- Método de Gauss:

Sustituyendo $p = 2$, $M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right) \approx \begin{matrix} F_2 + F_1 \\ F_3 - F_1 \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \end{array}\right) \approx F_3 + F_2 \approx$

$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \approx$ Pasando a ecuaciones: $\begin{Bmatrix} x + y + z = 0 \\ 3y + 3z = -3 \\ z = -1 \end{Bmatrix}$ Así: $\boxed{z = -1}$ Sustituyendo z en las

dos primeras ecuaciones: $\begin{Bmatrix} x + y - 1 = 0 \\ 3y - 3 = -3 \end{Bmatrix}$ $\boxed{x = 1}$ y $\boxed{y = 0}$

---

31) Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

a) como $AX = XA \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 3b \\ c & 3d \end{pmatrix} \Rightarrow$ Igualando términos:

$$\left.\begin{cases} a=a \\ b=3b \Rightarrow b=0 \\ 3c=c \\ 3d=3d \Rightarrow d=0 \end{cases}\right\}$$ luego $\boxed{X=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}}$

b) como $AX=XA \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c & d \\ 3a & 3b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3b & a \\ 3d & c \end{pmatrix} \Rightarrow$ Igualando términos:

$$\left.\begin{cases} c=3b \\ d=a \\ 3a=3d \Rightarrow a=d \\ 3b=c \end{cases}\right\}$$, con lo que $\boxed{X=\begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}}$

---

32) $\begin{cases} x & +y & +2z & = & 2 \\ -2x & +3y & +z & = & 1 \\ -x & +ay & +3z & = & 3 \end{cases}$, Matrices asociadas: $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & a & 3 \end{pmatrix}$ y $M^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & a & 3 & 3 \end{array}\right)$

a) $|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & a & 3 \end{vmatrix}=20-5a=0 \Rightarrow a=4$

- Caso 1.- Si $a\neq 4$, $|M|\neq 0 \Rightarrow rang(M)=3=rang(M^*) \Rightarrow SCD$
- Caso 2.- Si $a=4$,sustituyendo: $rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & 3 \end{array}\right) = \begin{matrix} F_2+2F_1 \\ F_3+F_1 \end{matrix} = rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \end{array}\right) =$

$$=F_3-F_2=rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rang(M)=2=rang(M^*) \Rightarrow SCI$$

b) Si $a=2$, sabemos que el sistema es compatible determinado. Por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right) \approx \begin{matrix} F_2+2F_1 \\ F_3+F_1 \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 5 & 5 \end{array}\right) \approx F_2/2 \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 5 \end{array}\right) \approx F_3-3F_2 \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

En ecuaciones: $\left.\begin{cases} x+y+2z=2 \\ y+z=1 \\ 2z=2 \end{cases}\right\}$ de la 3ª ecuación $\boxed{z=1}$, sustituyendo en la 2ª: $y+1=1 \Rightarrow \boxed{y=0}$

Por último de la 1ª: $x+0+2=2 \Rightarrow \boxed{x=0}$

---

33) $\begin{cases} x & -2y & +z & = & 0 \\ 3x & +2y & -2z & = & 3 \\ 2x & +2y & +az & = & 8 \end{cases}$ Matrices asociadas: $M=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}$ y $M^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & a & 8 \end{array}\right)$

a) $|M|=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & 2 & -2\\ 2 & 2 & a\end{vmatrix}=8a+14=0\Rightarrow a=-\dfrac{7}{4}$

- Caso 1.- Si $a\neq-\dfrac{7}{4}$, $|M|\neq 0\Rightarrow rang(M)=3=rang(M^*)\Rightarrow SCD$
- Caso 2.- Si $a=-\dfrac{7}{4}$,sustituyendo: $rang\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & -2 & 3\\ 2 & 2 & -7/4 & 8\end{array}\right)=\begin{matrix}F_2-3F_1\\ F_3-2F_1\end{matrix}=rang\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 8 & -5 & 3\\ 0 & 6 & -15/4 & 8\end{array}\right)=$

$=8F_3-6F_2=rang\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 8 & -5 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 46\end{array}\right)\Rightarrow rang(M)=2\neq 3=rang(M^*)\Rightarrow SI$

b) Si $a=4$, sabemos que el sistema es compatible determinado. Procediendo por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & -2 & 3\\ 2 & 2 & 4 & 8\end{array}\right)\approx\begin{matrix}F_2-3F_1\\ F_3-2F_1\end{matrix}\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 8 & -5 & 3\\ 0 & 6 & 2 & 8\end{array}\right)\approx 8F_3-6F_2\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 8 & -5 & 3\\ 0 & 0 & 46 & 46\end{array}\right)$$

En ecuaciones: $\left\{\begin{array}{c}x-2y+z=0\\ 8y-5z=3\\ 46z=46\end{array}\right\}$ de la 3ª ecuación $\boxed{z=1}$, sustituyendo en la 2ª: $8y-5=3\Rightarrow\boxed{y=1}$

Por último de la 1ª: $x-2+1=0\Rightarrow\boxed{x=1}$

---

34) $\left\{\begin{array}{llll}x & +ay & +z & = 1\\ & +2y & +az & = 2\\ x & +y & +z & = 1\end{array}\right.$ Matrices asociadas: $M=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ 0 & 2 & a\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ y $M^*=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & a & 1 & 1\\ 0 & 2 & a & 2\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)$

a) $|M|=\begin{vmatrix}1 & a & 1\\ 0 & 2 & a\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=F_3-F_1=\begin{vmatrix}1 & a & 1\\ 0 & 2 & a\\ 0 & 1-a & 0\end{vmatrix}=-a(1-a)=0\Rightarrow\left\langle\begin{array}{l}a=0\\ a=1\end{array}\right.$

- Caso 1.- Si $a\neq 0, a\neq 1$, $|M|\neq 0\Rightarrow rang(M)=3=rang(M^*)\Rightarrow SCD$
- Caso 2.- Si $a=0$,sustituyendo: $rang\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)=F_3-F_1=rang\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)=F_2-2F_3=$

$=rang\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)\Rightarrow rang(M)=2\neq 3=rang(M^*)\Rightarrow SI$

- Caso 3.- Si $a=1$,sustituyendo: $rang\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)=F_3-F_1=rang\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$

$$\Rightarrow rang(M) = 2 = rang(M^*) \Rightarrow SCI$$

b) Si $a = 3$, sabemos que el sistema es compatible determinado. Procediendo por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \approx F_3 - F_1 \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \approx F_3 + F_2 \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

En ecuaciones: $\left\{\begin{array}{c} x + 3y + z = 1 \\ 2y + 3z = 2 \\ 3z = 2 \end{array}\right\}$ de la 3ª ecuación $\boxed{z = \frac{2}{3}}$, sustituyendo en la 2ª: $2y + 3 = 3 \Rightarrow \boxed{y = 0}$

Por último de la 1ª: $x + \frac{2}{3} = 1 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{3}}$

Si $a = 1$, sabemos que el sistema es compatible indeterminado. La matriz reducida es:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ en ecuaciones: $\left\{\begin{array}{c} x + y + z = 1 \\ 2y + z = 2 \end{array}\right\}$, Llamando $z = t$, y sustituyendo en la 2ª ecuación:

$2y = 2 - t \Rightarrow y = \frac{2-t}{2}$. De la 1ª ecuación: $x + \frac{2-t}{2} + t = 1 \Rightarrow x = -\frac{t}{2}$ luego $\boxed{\left\{\left(-\frac{t}{2}, \frac{2-t}{2}, t\right) \middle| \, t \in R\right\}}$

---

35) Sean $\left\{\begin{array}{c} x = \text{Ha de barbecho} \\ y = \text{Ha de trigo} \\ z = \text{Ha de cebada} \end{array}\right\}$, planteamos el sistema: $\left\{\begin{array}{c} x + y + z = 10 \\ y = 2 + z \\ x = y + z - 6 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Matricialmente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -6 \end{array}\right) \approx F_3 - F_1 \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -16 \end{array}\right) \approx F_3 + 2F_2 \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -13 \end{array}\right)$$

De la 3ª ecuación $\boxed{z = 3}$, sustituyendo en la 2ª $y - 3 = 2 \Rightarrow \boxed{y = 5}$. Por último sustituyendo en la 1ª

$x + 5 + 3 = 10 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

---

36) Sean $\left\{\begin{array}{c} x = \text{casas tipoA} \\ y = \text{casas tipoB} \\ z = \text{casas tipoC} \end{array}\right\}$ planteamos el sistema: $\left\{\begin{array}{c} 10x + 15y + 20z = 270 \\ 2x + 4y + 6z = 68 \\ 2x + 3y + 5z = 58 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Matricialmente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 15 & 20 & 270 \\ 2 & 4 & 6 & 68 \\ 2 & 3 & 5 & 58 \end{array}\right) \approx \begin{array}{c} F_1/5 \\ F_2/2 \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 54 \\ 1 & 2 & 3 & 34 \\ 2 & 3 & 5 & 58 \end{array}\right) \approx F_2 \leftrightarrow F_1 \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 34 \\ 2 & 3 & 4 & 54 \\ 2 & 3 & 5 & 58 \end{array}\right) \approx F_i - 2F_1 \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 34 \\ 0 & -1 & -2 & -14 \\ 0 & -1 & -1 & -10 \end{array}\right)$$

$\approx F_3 - F_2 \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 34 \\ 0 & -1 & -2 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$. De la 3ª ecuación $\boxed{z = 4}$, sustituyendo en la 2ª ecuación

$-y-8=-14 \Rightarrow \boxed{y=6}$. Por último sustituyendo en la 1ª: $x+12+12=34 \Rightarrow \boxed{x=10}$

---

37) $\begin{cases} x + y + kz = 4 \\ 2x - y + 2z = 5 \\ -x + 3y - z = 0 \end{cases}$ Matrices asociadas: $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ y $M^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right)$

a) $|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=5k-5=0 \Rightarrow k=1$

- Caso 1.- Si $k \neq 1$, $|M| \neq 0 \Rightarrow rang(M)=3=rang(M^*) \Rightarrow SCD$
- Caso 2.- Si $k=1$,sustituyendo: $rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) = \begin{matrix} F_3-2F_1 \\ F_3+F_1 \end{matrix} = rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{array}\right) = F_2/3 =$

$$= rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{array}\right) = F_3+4F_2 = rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rang(M)=2=rang(M^*) \Rightarrow SCI$$

b) El sistema tiene infinitas soluciones para $k=1$. Resolviendo con la matriz reducida:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ En ecuaciones: $\begin{Bmatrix} x+y+z=4 \\ -y=-1 \end{Bmatrix}$ de la 2ª ecuación es claro que $y=1$. Si hacemos $z=t$, y sustituimos en la 1ª ecuación $x+1+t=4 \Rightarrow x=3-t$. Luego sol: $\boxed{\{(3-t,1,t) \mid t \in R\}}$

c) Si $k=0$, sabemos por el apartado a) que el sistema es compatible determinado. Sustituyendo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \approx \begin{matrix} F_2-2F_1 \\ F_3+F_1 \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -1 & 4 \end{array}\right) \approx F_3+F_2 \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \approx F_2 \leftrightarrow F_3 \approx$$

$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \end{array}\right) \approx F_3+3F_2 \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right)$ En ecuaciones: $\begin{Bmatrix} x+y=4 \\ y+z=1 \\ 5z=0 \end{Bmatrix}$ de la 3ª ecuación $\boxed{z=0}$,

sustituyendo en la 2ª: $y+0=1 \Rightarrow \boxed{y=1}$. Por último de la 1ª: $x+1=4 \Rightarrow \boxed{x=3}$

---

38) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + ky + z = 3 \\ kx \quad -3z = 6 \end{cases}$ Matrices asociadas: $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ k & 0 & -3 \end{pmatrix}$ y $M^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & k & 1 & 3 \\ k & 0 & -3 & 6 \end{array}\right)$

a) $|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ k & 0 & -3 \end{vmatrix} = -(k-1)(k+3) = 0 \Rightarrow \left\langle \begin{matrix} k=1 \\ k=-3 \end{matrix} \right.$

- Caso 1.- Si $k \neq 1, k \neq -3$, $|M| \neq 0 \Rightarrow rang(M) = 3 = rang(M^*) \Rightarrow SCD$
- Caso 2.- Si $k=1$,sustituyendo: $rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right) = F_i - F_1 = rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 3 \end{array}\right)$

  $\Rightarrow rang(M) = 2 = rang(M^*) \Rightarrow SCI$
- Caso 3.- Si $k=-3$,sustituyendo: $rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right) = \begin{matrix} F_2 - F_1 \\ F_3 + 3F_1 \end{matrix} = rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 15 \end{array}\right) = F_3/3 =$

  $= rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right) = F_2 \leftrightarrow F_3 = rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right) = F_3 + 4F_2 = rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{array}\right)$

  $\Rightarrow rang(M) = 2 \neq 3 = rang(M^*) \Rightarrow SI$

b) El sistema tiene infinitas soluciones para $k=1$. Resolviendo con la matriz reducida:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 3 \end{array}\right) \approx$ En ecuaciones $\left\{\begin{matrix} x+y+z=3 \\ -y-4z=3 \end{matrix}\right\}$ Si hacemos $z=t$, y sustituimos en la 2ª ecuación $-y-4t=3 \Rightarrow y=-3-4t$. Sustituyendo en la 1ª: $x-3-4t+t=3 \Rightarrow x=6+3t$.

Luego sol: $\boxed{\{(6+3t, -3-4t, t) \mid t \in R\}}$

c) Si $k=3$, sabemos por el apartado a) que el sistema es compatible determinado. Sustituyendo:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right) \approx \begin{matrix} F_2 - F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \end{array}\right) \approx F_3/3 \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right)$. En ecuaciones:

$\left\{\begin{matrix} x+y+z=3 \\ 2y=0 \\ -y-2z=-1 \end{matrix}\right\}$ De la 2ª ecuación: $\boxed{y=0}$. Sustituyendo en la 3ª ecuación: $-2z=-1 \Rightarrow \boxed{z=\frac{1}{2}}$

Sust. En la 1ª ecuación: $x+0+\frac{1}{2}=3 \Rightarrow \boxed{x=\frac{5}{2}}$

---

39) $\left\{\begin{matrix} x & -y & +kz & = & 1 \\ 2x & -ky & +z & = & 2 \\ x & -y & -z & = & k-1 \end{matrix}\right.$ Matrices asociadas: $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 2 & -k & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & 1 \\ 2 & -k & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & k-1 \end{array}\right)$

a) $|M|=\begin{vmatrix}1 & -1 & k\\ 2 & -k & 1\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=-(k+1)(2-k)=0\Rightarrow\left\langle\begin{matrix}k=-1\\ k=2\end{matrix}\right.$

- Caso 1.- Si $k\neq-1, k\neq 2$, $|M|\neq 0\Rightarrow rang(M)=3=rang(M^*)\Rightarrow SCD$
- Caso 2.- Si $k=-1$,sustituyendo: $rang\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & -1 & -2\end{array}\right)=\begin{matrix}F_2-2F_1\\ F_3-F_1\end{matrix}=rang\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{array}\right)$

  $\Rightarrow rang(M)=2\neq 3=rang(M^*)\Rightarrow SI$
- Caso 3.- Si $k=2$,sustituyendo: $rang\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 1\\ 2 & -2 & 1 & 2\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{array}\right)=\begin{matrix}F_2-2F_1\\ F_3-F_1\end{matrix}=rang\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 0\end{array}\right)=F_3-F_2=$

  $=rang\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Rightarrow rang(M)=2=rang(M^*)\Rightarrow SCI$

b) El sistema tiene infinitas soluciones para $k=2$. Resolviendo con la matriz reducida:

$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\approx$ En ecuaciones $\left\{\begin{matrix}x-y+2z=1\\ -3z=0\end{matrix}\right\}$ De la 2ª ecuación $\boxed{z=0}$ Si hacemos $y=t$, y sustituimos en la 1ª: $x-t=1\Rightarrow x=1+t$. Sustituyendo en la 1ª: $x-3-4t+t=3\Rightarrow x=6+3t$.

Luego sol: $\boxed{\{(1+t,t,0)|\ t\in R\}}$

c) Si $k=3$, sabemos por el apartado a) que el sistema es compatible determinado. Sustituyendo:

$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 3 & 1\\ 2 & -3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & -1 & 2\end{array}\right)\approx\begin{matrix}F_2-2F_1\\ F_3-F_1\end{matrix}\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 3 & 1\\ 0 & -1 & -5 & 0\\ 0 & 0 & -4 & 1\end{array}\right)$. En ecuaciones: $\left\{\begin{matrix}x-y+3z=1\\ -y-5z=0\\ -4z=1\end{matrix}\right\}$ De la 3ª ecuación: $\boxed{z=-\frac{1}{4}}$.

Sustituyendo en la 2ª ecuación: $-y+\frac{5}{4}=0\Rightarrow\boxed{y=\frac{5}{4}}$. Sust. En la 1ª ecuación: $x-\frac{5}{4}-\frac{3}{4}=1\Rightarrow\boxed{x=3}$

---

40) $\left\{\begin{matrix}kx & -2y & +7z & = & 8\\ x & -y & +kz & = & 2\\ -x & +y & +z & = & 2\end{matrix}\right.$ Matrices asociadas: $M=\begin{pmatrix}k & -2 & 7\\ 1 & -1 & k\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ y $M^*=\left(\begin{array}{ccc|c}k & -2 & 7 & 8\\ 1 & -1 & k & 2\\ -1 & 1 & 1 & 2\end{array}\right)$

a) $|M|=\begin{vmatrix}k & -2 & 7\\ 1 & -1 & k\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}=k^2-k-2=0\Rightarrow\left\langle\begin{matrix}k=-1\\ k=2\end{matrix}\right.$

- Caso 1.- Si $k\neq-1, k\neq 2$, $|M|\neq 0\Rightarrow rang(M)=3=rang(M^*)\Rightarrow SCD$

- Caso 2.- Si $k=-1$, sustituyendo: $rang\begin{pmatrix}-1 & -2 & 7 & \vert 8\\ 1 & -1 & -1 & \vert 2\\ -1 & 1 & 1 & \vert 2\end{pmatrix}=\begin{matrix}F_2+F_1\\ F_3-F_1\end{matrix}=rang\begin{pmatrix}-1 & -2 & 7 & \vert 8\\ 0 & -3 & 6 & \vert 10\\ 0 & 3 & -6 & \vert -6\end{pmatrix}=$

$$=F_3+F_2=rang\begin{pmatrix}-1 & -2 & 7 & \vert 8\\ 0 & -3 & 6 & \vert 10\\ 0 & 0 & 0 & \vert 4\end{pmatrix}\Rightarrow rang(M)=2\neq 3=rang(M^*)\Rightarrow SI$$

- Caso 3.- Si $k=2$, sustituyendo: $rang\begin{pmatrix}2 & -2 & 7 & \vert 8\\ 1 & -1 & 2 & \vert 2\\ -1 & 1 & 1 & \vert 2\end{pmatrix}=F_1\leftrightarrow F_2=rang\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & \vert 2\\ 2 & -2 & 7 & \vert 8\\ -1 & 1 & 1 & \vert 2\end{pmatrix}=$

$$\begin{matrix}F_2-2F_1\\ F_3+F_1\end{matrix}=rang\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & \vert 2\\ 0 & 0 & 3 & \vert 4\\ 0 & 0 & 3 & \vert 4\end{pmatrix}=F_3-F_2=rang\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & \vert 2\\ 0 & 0 & 3 & \vert 4\\ 0 & 0 & 0 & \vert 0\end{pmatrix}\Rightarrow rang(M)=2=rang(M^*)\Rightarrow SCI$$

b) El sistema tiene infinitas soluciones para $k=2$. Resolviendo con la matriz reducida:

$\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & \vert 2\\ 0 & 0 & 3 & \vert 4\\ 0 & 0 & 0 & \vert 0\end{pmatrix}\approx$ En ecuaciones $\begin{Bmatrix}x-y+2z=2\\ 3z=4\end{Bmatrix}$ De la 3ª ecuación $\boxed{z=\frac{4}{3}}$. Si hacemos $y=t$, y sustituimos en la 1ª: $x-t+\frac{8}{3}=2\Rightarrow x=-\frac{2}{3}+t$. Luego sol: $\boxed{\left\{\left(-\frac{2}{3}+t,t,\frac{4}{3}\right)\middle|\, t\in R\right\}}$

c) Si $k=0$, sabemos por el apartado a) que el sistema es compatible determinado. Sustituyendo:

$\begin{pmatrix}0 & -2 & 7 & \vert 8\\ 1 & -1 & 0 & \vert 2\\ -1 & 1 & 1 & \vert 2\end{pmatrix}\approx F_1\leftrightarrow F_2\approx\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & \vert 2\\ 0 & -2 & 7 & \vert 8\\ -1 & 1 & 1 & \vert 2\end{pmatrix}\approx F_3+F_1\approx\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & \vert 2\\ 0 & -2 & 7 & \vert 8\\ 0 & 0 & 1 & \vert 4\end{pmatrix}$. En ecuaciones: $\begin{Bmatrix}x-y=2\\ -2y+7z=8\\ z=4\end{Bmatrix}$

De la 3ª ecuación: $\boxed{z=4}$. Sustituyendo en la 2ª ecuación: $-2y+28=8\Rightarrow\boxed{y=10}$.

Por último de la 1ª ecuación: $x-y=2\Rightarrow\boxed{x=12}$

---

41) $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}1 & -1\\ -3 & 2\\ -4 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\22\\7a\end{pmatrix}$, operando: $\begin{cases}x+y-z=1\\ 2x-3y+2z=22\\ x-4y+az=7a\end{cases}$

Matrices asociadas: $M=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -3 & 2\\ 1 & -4 & a\end{pmatrix}$ y $M^*=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & \vert 1\\ 2 & -3 & 2 & \vert 22\\ 1 & -4 & a & \vert 7a\end{pmatrix}$

a) $|M|=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -3 & 2\\ 1 & 4 & a\end{vmatrix}=15-5a=0\Rightarrow a=3$

- Caso 1.- Si $a \neq 3$, $|M| \neq 0 \Rightarrow rang(M) = 3 = rang(M^*) \Rightarrow SCD$
- Caso 2.- Si $a = 3$,sustituyendo: $rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 22 \\ 1 & -4 & 3 & 21 \end{pmatrix} = \begin{matrix} F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{matrix} = rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 20 \\ 0 & -5 & 4 & 20 \end{pmatrix} =$

$$= F_3 - F_2 = rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rang(M) = 2 = rang(M^*) \Rightarrow SCI$$

b) El sistema tiene infinitas soluciones para $a = 3$. Resolviendo con la matriz reducida:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx$ En ecuaciones: $\left\{ \begin{matrix} x + y - z = 1 \\ -5y + 4z = 20 \end{matrix} \right\}$ Si hacemos $z = t$, y sustituimos en la 3ª:ecuación

$-5y + 4t = 20 \Rightarrow 5y = 4t - 20 \Rightarrow y = -4 + \frac{4}{5}t$. De la 1ª ecuación: $x - 4 + \frac{4}{5}t - t = 1 \Rightarrow x = 5 + \frac{1}{5}t$.

Luego sol: $\boxed{\left\{ \left(5 + \frac{1}{5}t, -4 + \frac{4}{5}t, t \right) \middle| \, t \in R \right\}}$

c) Si $a = 0$, sabemos por el apartado a) que el sistema es compatible determinado. Sustituyendo:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 22 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{matrix} F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_2 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 20 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \approx F_3 - F_2 \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 20 \\ 0 & 0 & -3 & -21 \end{pmatrix}$. En ecuaciones:

$\left\{ \begin{matrix} x + y - z = 1 \\ -5y + 4z = 20 \\ -3z = -21 \end{matrix} \right\}$ De la 3ª ecuación: $\boxed{z = 7}$. Sustituyendo en la 2ª ecuación: $-5y + 28 = 20 \Rightarrow \boxed{y = \frac{8}{5}}$.

Por último de la 1ª ecuación: $x + \frac{8}{5} - 7 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{32}{5}}$

---

42) a) $|A| = \begin{vmatrix} a-2 & 2 & -1 \\ 2 & a & 2 \\ 2a & 2(a+1) & a+1 \end{vmatrix} = -a(1-a)(a-2) = 0$, luego no existe A^{-1} si $\boxed{a = 0, 1, 2}$

b) Si $a = -1$, sustituyendo: $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/6 \end{pmatrix}}$

c) Si $a = 0$, $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, el sistema homogéneo $AX = 0$, quedaría: $\left\{ \begin{matrix} -2x & +2y & -z & = & 0 \\ 2x & & +2z & = & 0 \\ & +2y & +z & = & 0 \end{matrix} \right.$

Tomando $A=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -1\\ 2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\approx F_2+F_1\approx\begin{pmatrix}-2 & 2 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\approx F_3-F_2\approx\begin{pmatrix}-2 & 2 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

En ecuaciones: $\left\{\begin{matrix}-2x+2y-z=0\\ 2y+z=0\end{matrix}\right\}$ Si hacemos $z=t$, y sustituimos en la 2ª:ecuación $2y+t=0\Rightarrow$

$y=-\frac{t}{2}$. De la 1ª ecuación: $-2x-t-t\Longrightarrow x=-t$. Luego sol: $\boxed{\left\{\left(-t,-\frac{t}{2}t,t\right)\middle|\, t\in R\right\}}$

---

43) $\left\{\begin{matrix}ax & +y & +z & = & a\\ & ay & +z & = & 1\\ ax & +y & +az & = & a\end{matrix}\right.$ Matrices asociadas: $M=\begin{pmatrix}a & 1 & 1\\ 0 & a & 1\\ a & 1 & a\end{pmatrix}$ y $M^*=\left(\begin{array}{ccc|c}a & 1 & 1 & a\\ 0 & a & 1 & 1\\ a & 1 & a & a\end{array}\right)$

a) $|M|=\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\ 0 & a & 1\\ a & 1 & a\end{vmatrix}=a^3-a^2=0\Rightarrow a^2(a-1)=0\Rightarrow\left\langle\begin{matrix}a=0\\ a=1\end{matrix}\right.$

- Caso 1.- Si $a\neq 0, a\neq 1$, $|M|\neq 0\Rightarrow rang(M)=3=rang(M^*)\Rightarrow SCD$
- Caso 2.- Si $a=0$,sustituyendo: $rang\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)=F_3-F_1=rang\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{array}\right)=$

  $=F_3+F_2=rang\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow rang(M)=2\neq 3=rang(M^*)\Rightarrow SI$
- Caso 3.- Si $a=1$,sustituyendo: $rang\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)=F_3-F_2=rang\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Rightarrow$

  $\Rightarrow rang(M)=2=rang(M^*)\Rightarrow SCI$

b) El sistema tiene infinitas soluciones para $a=0$. Resolviendo con la matriz reducida:

$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)=\approx$ En ecuaciones $\left\{\begin{matrix}x+y+z=1\\ y+z=1\end{matrix}\right\}$ Si hacemos $z=t$, y sustituimos en la 2ª: ecuación:

$y+t=1\Rightarrow y=1-t$. De la 1ª ecuación: $x+1-t+t=1\Rightarrow x=0$ Luego sol: $\boxed{\{(0,1-t,t)|\, t\in R\}}$

c) Si $a=3$, sabemos por el apartado a) que el sistema es compatible determinado. Sustituyendo:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right) \approx F_3 - F_1 \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$. En ecuaciones: $\left\{\begin{array}{c} 3x + y + z = 3 \\ 3y + z = 1 \\ z = 0 \end{array}\right\}$ De la 3ª ecuación: $\boxed{z = 0}$.

Sustituyendo en la 2ª ecuación: $3y = 1 \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{3}}$. De la 1ª ecuación: $3x + \frac{1}{3} = 3 \Rightarrow \boxed{x = \frac{8}{9}}$

---

44) a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & k & 0 \\ -k & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & k & 0 \\ -k & 1 & 4 \end{vmatrix} = k^2 - 4k + 3 = 0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} k = 1 \\ k = 3 \end{array}\right.$, luego no existe A^{-1} si $\boxed{k = 1, 3}$

b) Si $k = 0$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ -4 & -4/3 & 1 \\ 1 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}}$

c) Si $k = 0$, como $AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$, es decir:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ -4 & -4/3 & 1 \\ 1 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}$$

---

45) Consideramos las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Si $AB = BA \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} \Rightarrow$ Igualando coeficicentes:

$$\left\{\begin{array}{c} a = 0 \\ a = 0 \\ 2 = b \\ a + b = b \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a = 0} \ , \ \boxed{b = 2}$$

b) $A^2 + cA + dI = O \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} d & 0 \\ 1+c & 1+c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Igualando coeficicentes $\left\{\begin{array}{c} d = 0 \\ 0 = 0 \\ 1 + c = 0 \Rightarrow c = -1 \\ 1 + c + d = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{c = -1} \ , \ \boxed{d = 0}$

c) $(A - I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (Sistema Homogéneo)

Estudiando $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \approx F_2 + F_1 \approx \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ El sistema es compatible indeterminado.

En ecuaciones: $\{-x = 0\}$, luego llamando $y = t$, sol: $\boxed{\{(0,t) | t \in R\}}$

---

46) $\begin{cases} x & +ay & -7z & = & 4a-1 \\ x & +(1+a)y & -(6+a)z & = & 3a+1 \\ & ay & -6z & = & 3a-2 \end{cases}$ Matrices : $M = \begin{pmatrix} 1 & a & -7 \\ 1 & 1+a & -6-a \\ 0 & a & -6 \end{pmatrix}$ y $M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -7 & 4a-1 \\ 1 & 1+a & -6-a & 3a+1 \\ 0 & a & -6 & 3a-2 \end{array}\right)$

a) $|M| = \begin{vmatrix} 1 & a & -7 \\ 1 & 1+a & -6-a \\ 0 & a & -6 \end{vmatrix} = a^2 - a - 6 = 0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} a = -2 \\ a = 3 \end{array} \right.$

- Caso 1.- Si $a \neq -2, a \neq 3$, $|M| \neq 0 \Rightarrow rang(M) = 3 = rang(M^*) \Rightarrow SCD$
- Caso 2.- Si $a = -2$,sustituyendo: $rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -7 & -9 \\ 1 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & -2 & -6 & -8 \end{array}\right) = F_2 - F_1 = rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -6 & -8 \end{array}\right) =$

  $= F_3 + 2F_2 = rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rang(M) = 2 = rang(M^*) \Rightarrow SCI$
- Caso 3.- Si $a = 3$,sustituyendo: $rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -7 & 11 \\ 1 & 4 & -9 & 10 \\ 0 & 3 & -6 & 7 \end{array}\right) = F_2 - F_1 = rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -7 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & -8 \end{array}\right) =$

  $= F_3 - 3F_2 = rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -7 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right) \Rightarrow rang(M) = 2 \neq 3 = rang(M^*) \Rightarrow SI$

b) El sistema tiene infinitas soluciones para $a = -2$.

De la matriz final (ver Caso 2) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -7 & -9 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x - 2y - 7z = -9 \\ y + 3z = 4 \end{array} \right\}$ Si hacemos $z = t$, y sustituimos

en la 2ª ecuación: $y + 3t = 4 \Rightarrow y = 4 - 3t$. Sustituyendo en la 1ª ecuación: $x - 2(4 - 3t) - 7t = -9 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = t - 1$. Luego solución: $\boxed{\{(-1 + t, 4 - 3t, t) | t \in R\}}$

c) Si $a = -3$, el sistema es compatible determinado (ver apartado a)). Sustituyendo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -7 & -13 \\ 1 & -2 & -3 & -8 \\ 0 & -3 & -6 & -11 \end{array}\right) \approx F_2 - F_1 \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -7 & -13 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -6 & -11 \end{array}\right) \approx F_3 + 3F_2 \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -7 & -13 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow$$

En ecuaciones: $\left.\begin{cases} x-3y-7z=-13 \\ y+4z=5 \\ 6z=4 \end{cases}\right\}$ De la 3ª ecuación: $\boxed{z=\frac{2}{3}}$.

Sustituyendo en la 2ª ecuación: $y+\frac{8}{3}=5 \Rightarrow \boxed{y=\frac{7}{3}}$. De la 1ª ecuación: $x-\frac{21}{3}-\frac{14}{3}=-13 \Rightarrow \boxed{x=-\frac{4}{3}}$

---

47) Sean $x=$nº de socios de A ; $y=$nº de socios de B ; $z=$nº de no socios de A ni de B

El sistema que se plantea es: $\left.\begin{cases} x+y+z=7200 \\ (x+y)/z=13/3 \\ x+6500=y \end{cases}\right\} \Rightarrow$ Operando: $\left.\begin{cases} x+y+z=7200 \\ 3x+3y-13z=0 \\ x-y=-6500 \end{cases}\right\} \Rightarrow$

Despejando de la última ecuación: $x=y-6500$. Sustituyendo en las otras ecuaciones:

$\left.\begin{cases} 2y+z=78500 \\ 6y-13z=19500 \end{cases}\right\}$. Despejando de la 1ª ecuación: $z=78500-2y$. Sustituyendo en la 2ª ecuación:

$6y-13(78500-2y)=19500 \Rightarrow 32y=1040000 \Rightarrow \boxed{32500 \text{ socios de B}}$

Sustituyendo este valor en x: $x=32500-6500 \Rightarrow \boxed{26000 \text{ socios de A}}$

---

48) $\begin{cases} x & +y & +z & = & 2 \\ x & +ky & +2z & = & 5 \\ kx & +y & +z & = & 1 \end{cases}$ Matrices : $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 2 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $M^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & k & 2 & 5 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

a) $|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 2 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix}=-k^2+3k-2=0 \Rightarrow \left\langle \begin{matrix} k=1 \\ k=2 \end{matrix} \right.$

- <u>Caso 1</u>.- Si $k\neq 1, k\neq 2$, $|M|\neq 0 \Rightarrow rang(M)=3=rang(M^*) \Rightarrow SCD$
- <u>Caso 2</u>.- Si $k=1$,sustituyendo: $rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)=F_i-F_1=rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$

  $\Rightarrow rang(M)=2\neq 3=rang(M^*) \Rightarrow SI$
- <u>Caso 3</u>.- Si $k=2$,sustituyendo: $rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)=\begin{matrix} F_2-F_1 \\ F_3-2F_1 \end{matrix}=rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right)=$

  $=F_3+F_2=rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rang(M)=2=rang(M^*) \Rightarrow SCI$

b) Si $k=0$, el sistema es compatible determinado (ver apartado a)). Sustituyendo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \approx F_2 - F_1 \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \approx F_3 + F_2 \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow$$

En ecuaciones: $\left\{\begin{array}{c} x+y+z=2 \\ -y+z=3 \\ 2z=4 \end{array}\right\}$ De la 3ª ecuación: $\boxed{z=2}$.

Sustituyendo en la 2ª ecuación: $-y+2=3 \Rightarrow \boxed{y=-1}$. De la 1ª ecuación: $x-1+2=2 \Rightarrow \boxed{x=1}$

b) El sistema tiene infinitas soluciones para $k=2$.

De la matriz final (ver Caso 3) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=2 \\ y+z=3 \end{array}\right\}$ Si hacemos $z=\lambda$, y sustituimos

en la 2ª ecuación: $y+\lambda=3 \Rightarrow y=3-\lambda$. Sustituyendo en la 1ª ecuación: $x+3-\lambda+\lambda=2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=-1$. Luego solución: $\boxed{\{(-1, 3-\lambda, \lambda) \mid \lambda \in R\}}$

---

49) a) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$. Operando: $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$

b) Si $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{x=1}, \boxed{y=-1}, \boxed{z=1}$

---

50) $\left\{\begin{array}{rrrcr} ax & -2y & & = & 2 \\ 3x & -y & -z & = & -1 \\ x & +3y & +z & = & 1 \end{array}\right.$ Matrices : $M = \begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a & -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right)$

a) $|M| = \begin{vmatrix} a & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2a+8=0 \Rightarrow a=-4$

- <u>Caso 1</u>.- Si $a \neq -4$, , $|M| \neq 0 \Rightarrow rang(M)=3=rang(M^*) \Rightarrow SCD$
- <u>Caso 2</u>.- Si $a=-4$,sustituyendo: $rang\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) = F_3 \leftrightarrow F_1 = rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ -4 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right) =$

$$=\begin{matrix}F_2-3F_1\\F_3+4F_1\end{matrix}=rang\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&1&1\\0&-10&-4&-2\\0&10&4&6\end{array}\right)=F_3+F_2=rang\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&1&1\\0&-10&-4&-2\\0&0&0&4\end{array}\right)\Rightarrow rang(M)=2\neq 3=rang(M^*)\Rightarrow SI$$

b) Si $a=1$, el sistema es compatible determinado (ver apartado a)). Sustituyendo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&0&2\\3&-1&-1&-1\\1&3&1&1\end{array}\right)\approx\begin{matrix}F_2-3F_1\\F_3-F_1\end{matrix}\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&0&2\\0&5&-1&-7\\0&5&1&-1\end{array}\right)\approx F_3-F_2\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&0&2\\0&5&-1&-7\\0&0&2&6\end{array}\right)\Rightarrow$$

En ecuaciones: $\left\{\begin{array}{c}x-2y=2\\5y-z=-7\\2z=6\end{array}\right\}$ De la 3ª ecuación: $\boxed{z=3}$.

Sustituyendo en la 2ª ecuación: $5y-3=-7\Rightarrow 5y=-4\Rightarrow\boxed{y=-\frac{4}{5}}$. De la 1ª ecuación: $x-2y=2\Rightarrow$

$\Rightarrow x+\frac{8}{5}=2\Rightarrow\boxed{x=\frac{2}{5}}$

---

51) a) $|A|=\begin{vmatrix}0&2\\3&0\end{vmatrix}=-6$, $\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1/3\\1/2&0\end{pmatrix}}$

b) Si $A\cdot X=B-I\Rightarrow A^{-1}A\cdot X=A^{-1}(B-I)\Rightarrow X=A^{-1}(B-I)=\begin{pmatrix}0&1/3\\1/2&0\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}-3&8\\3&-5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right]=$

$$=\begin{pmatrix}0&1/3\\1/2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4&8\\3&-6\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{X=\begin{pmatrix}1&-2\\-2&4\end{pmatrix}}$$

---

52) $\left\{\begin{array}{lllcl}kx&+y&&=&0\\x&+ky&-2z&=&1\\kx&-3y&+kz&=&0\end{array}\right.$ Matrices : $M=\begin{pmatrix}k&1&0\\1&k&-2\\k&-3&k\end{pmatrix}$ y $M^*=\left(\begin{array}{ccc|c}k&1&0&0\\1&k&-2&1\\k&-3&k&0\end{array}\right)$

a) $|M|=\begin{vmatrix}k&1&0\\1&k&-2\\k&-3&k\end{vmatrix}=k^3-9k=k(k^2-9)=0\Rightarrow k=0, k=\pm 3$

- Caso 1.- Si $k\neq 0,-3,3$, $|M|\neq 0\Rightarrow rang(M)=3=rang(M^*)\Rightarrow SCD$
- Caso 2.- Si $k=0$,sustituyendo: $rang\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&0&0\\1&0&-2&1\\0&-3&0&0\end{array}\right)=F_2\leftrightarrow F_1=rang\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-2&1\\0&1&0&0\\0&-3&0&0\end{array}\right)=$

$$=F_3+3F_1=rang\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-2&1\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\Rightarrow rang(M)=2=rang(M^*)\Rightarrow SCI$$

- Caso 3.- Si $k=-3$, sustituyendo: $rang\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0 & \vert & 0\\ 1 & -3 & -2 & \vert & 1\\ -3 & -3 & -3 & \vert & 0\end{pmatrix} = F_2 \leftrightarrow F_1 = rang\begin{pmatrix}1 & -3 & -2 & \vert & 1\\ -3 & 1 & 0 & \vert & 0\\ -3 & -3 & -3 & \vert & 0\end{pmatrix} =$

$= F_i + 3F_1 = rang\begin{pmatrix}1 & -3 & -2 & \vert & 1\\ 0 & -8 & -6 & \vert & 3\\ 0 & -12 & -9 & \vert & 3\end{pmatrix} = \begin{matrix}F_2/2\\ F_3/3\end{matrix} = rang\begin{pmatrix}1 & -3 & -2 & \vert & 1\\ 0 & -4 & -3 & \vert & 3/2\\ 0 & -4 & -3 & \vert & 1\end{pmatrix} = F_3 - F_2 = rang\begin{pmatrix}1 & -3 & -2 & \vert & 1\\ 0 & -4 & -3 & \vert & 3\\ 0 & 0 & 0 & \vert & -1/2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow rang(M) = 2 \neq 3 = rang(M^*) \Rightarrow SI$

- Caso 4.- Si $k=3$, sustituyendo: $rang\begin{pmatrix}3 & 1 & 0 & \vert & 0\\ 1 & 3 & -2 & \vert & 1\\ 3 & -3 & 3 & \vert & 0\end{pmatrix} = F_2 \leftrightarrow F_1 = rang\begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & \vert & 1\\ 3 & 1 & 0 & \vert & 0\\ 3 & -3 & 3 & \vert & 0\end{pmatrix} =$

$= F_i - 3F_1 = rang\begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & \vert & 1\\ 0 & -8 & 6 & \vert & -3\\ 0 & -12 & 9 & \vert & -3\end{pmatrix} = \begin{matrix}F_2/2\\ F_3/3\end{matrix} = rang\begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & \vert & 1\\ 0 & -4 & 3 & \vert & -3/2\\ 0 & -4 & 3 & \vert & -1\end{pmatrix} = F_3 - F_2 = rang\begin{pmatrix}1 & -3 & -2 & \vert & 1\\ 0 & -4 & -3 & \vert & 3\\ 0 & 0 & 0 & \vert & 1/2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow rang(M) = 2 \neq 3 = rang(M^*) \Rightarrow SI$

b) Si $k=1$, el sistema es compatible determinado (ver apartado a)). Sustituyendo:

$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & \vert & 0\\ 1 & 1 & -2 & \vert & 1\\ 1 & -3 & 1 & \vert & 0\end{pmatrix} \approx F_i - F_1 \approx \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & \vert & 0\\ 0 & 0 & -2 & \vert & 1\\ 0 & -4 & 1 & \vert & 0\end{pmatrix}$ En ecuaciones: $\left.\begin{cases}x+y=0\\ -2z=1\\ -4y+z=0\end{cases}\right\}$ De la 2ª ecuación: $\boxed{z=-\frac{1}{2}}$.

Sustituyendo en la 3ª ecuación: $-4y-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow 4y=-\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{y=-\frac{1}{8}}$. De la 1ª ecuación: $x+y=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x-\frac{1}{8}=0 \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{8}}$

---

53) a) Si $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}$. Como $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $A^tB = \begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 0\\ 5 & 1\end{pmatrix}$

Con lo que $\boxed{(A^tB)^{-1} = \begin{pmatrix}1/5 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}}$

b) Si $A\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ -1\\ 5\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ -1\\ 5\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}2x+y\\ -x\\ x-2y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ -1\\ 5\end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{cases}2x+y=0\\ -x=-1\\ x-2y=5\end{cases}\right\} \Rightarrow \boxed{x=1}$. Sustituyendo en

las demás ecuaciones: $\left.\begin{cases}2+y=0\\ 1-2y=5\end{cases}\right\} \Rightarrow \boxed{y=-2}$

---

54) $\begin{cases} x + y \quad az = 2 \\ 3x + 4y + 2z = a \\ 2x + 2y - z = 1 \end{cases}$ Matrices : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ y $M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 2 \\ 3 & 4 & 2 & a \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right)$

a) $|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3$

- Caso 1.- Si $a \neq 3$, $|M| \neq 0 \Rightarrow rang(M) = 3 = rang(M^*) \Rightarrow SCD$
- Caso 2.- Si $a = 3$,sustituyendo: $rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) = \begin{matrix} F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{matrix} = rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \end{array}\right) =$

$= F_3 - F_2 = rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow rang(M) = 2 = rang(M^*) \Rightarrow SCI$

b) Si $a = -1$, el sistema es compatible determinado (ver apartado a)). Sustituyendo:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \approx \begin{matrix} F_2 - 3F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \approx F_3 - F_2 \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{array}\right)$

En ecuaciones: $\left.\begin{cases} x + y - z = 2 \\ y + 5z = -7 \\ -4z = 4 \end{cases}\right\}$ De la 3ª ecuación: $\boxed{z = -1}$.

Sustituyendo en la 2ª ecuación: $y - 5 = -7 \Rightarrow \boxed{y = -2}$. De la 1ª ecuación: $x + y - z = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x - 2 + 1 = 2 \Rightarrow \boxed{x = 3}$

---

55) a) Sea el sistema $\begin{cases} 2x - \lambda y + z = -\lambda \\ 4x - 2\lambda y + 2z = \lambda - 3 \end{cases}$.

Matrices asociadas : $M = \begin{pmatrix} 2 & -\lambda & 1 \\ 4 & -2\lambda & 2 \end{pmatrix}$ y $M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -\lambda & 1 & -\lambda \\ 4 & -2\lambda & 2 & \lambda - 3 \end{array}\right)$

Estudiando rangos: $rang\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -\lambda & 1 & -\lambda \\ 4 & -2\lambda & 2 & \lambda - 3 \end{array}\right) = F_2 - 2F_1 = rang\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -\lambda & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 3\lambda - 3 \end{array}\right)$ (*)

Para que el sistema sea incompatible $rang(M) \neq rang(M^*)$. Como $rang(M) = 1$

$rang(M^*) = 2 \Rightarrow 3\lambda - 3 \neq 0 \Rightarrow \boxed{\lambda \neq 1}$

b) Si $\lambda = 1$, sustituyendo en (*) : $rang(M^*) = rang\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = 1$. Como el rango de M también es 1, el sistema será compatible indeterminado.

Quedará solo la ecuación $2x+y+z=-1$. Llamando $z=t,\ y=s$ y sustituyendo en la ecuación: $2x+s+t=-1 \Rightarrow x=\dfrac{-1-s-t}{2}$, luego solución $\boxed{\left\{\dfrac{-1-s-t}{2},\ s,\ t \;\middle|\; s,t\in R\right\}}$

---

56) a) Sea $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix} \Rightarrow A\cdot A^t=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$\left(A\cdot A^t\right)^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=A\cdot A^t$, luego $\left(A\cdot A^t\right)^{200}=A\cdot A^t=\boxed{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}}$

b) $A\cdot A^t-3I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-3&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\Rightarrow (A\cdot A^t-3I)^{-1}=\boxed{\begin{pmatrix}-1/2&0&0\\0&-1/3&0\\0&0&-1/2\end{pmatrix}}$
